多次元半線形熱方程式の球対称解に対する質量集中化有限要素法スキームの誤差評価

正木 歩

佐々木研究室

2025/1/29

目次

1. 研究の背景
   - 研究の背景
   - 研究目的
2. 有限要素法の導入
   - 弱形式化
   - 有限要素法
   - 先行研究との違い
   - スキーム解の一意性と正値性
3. 誤差解析
   - 誤差解析の準備
   - 誤差解析
   - 主定理の証明
4. 今後の課題
5. 参考文献

1 研究の背景

2 有限要素法の導入

3 誤差解析

4 今後の課題

5 参考文献

研究の背景

半線形放物型方程式

$$\begin{cases} U_t = \Delta U + f(U), & (t,x) \in (0,T) \times \Omega \\ U = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega \\ U(0,x) = U_0(x), & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $U : [0,T) \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかで有界な領域,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で滑らかで, $f(s) \geq 0 (s \geq 0)$ であるとする.

注意 (爆発問題)

f は非線形な関数で N は空間の次元数.
また $f(s) = s|s|^{\alpha}$ のとき (1) の解は空間の次元や初期値に応じて, 時間大域的に減衰するか, 無限大に発散するか, 有限時間で爆発する.

研究の背景

(1) の近似解を多次元 (とくに 4 次元以上) で考えることは非現実的
→球対称解を考えることで任意の次元 N を用いることができる.
以下,$U(t,x) = u(t,|x|)$ とし $I = (0,1)$ とする.

球対称解

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{N-1}{x} u_x + f(u), & x \in I, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), & x \in \bar{I}. \end{cases} \tag{2}$$

ただし
$u = u(x,t)$ は既知,$x \in \bar{I} = [0,1], t \geq 0, f$ は既知の局所リプシッツ連続関数とする.
$u^0 = U_0(x)$ は既知で,N は整数で 2 以上のものとする.

研究目的

球対称解 (2) とその近似解の誤差解析を行う.

研究目的

- (2) に対して先行研究とは異なる有限要素スキームを考案する
- 有限要素スキームについて解の一意性・正値性と収束の性質を示す
- 結果を爆発問題に活かすこと (未達成)

先行研究

T.Nakanishi and N.Saito,(2022) 球対称解 (2) について質量集中化有限要素スキームを提案

1 研究の背景

2 有限要素法の導入

3 誤差解析

4 今後の課題

5 参考文献

有限要素法の導入

(2) の弱形式は次のように定式化される.

球対称解 (2) の弱形式

次を満たす $u(\cdot, t)$ を見いだせ.

$$(u_t, \chi) + A(u, \chi) = (f(u), \chi) \qquad (\forall \chi \in H^1). \tag{3}$$

ここで,

$$(w, v) = \int_I x^{N-1} w v \, \mathrm{d}x, \qquad A(w, v) = \int_I x^{N-1} w_x v_x \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

としている.

有限要素空間

$\mathcal{P}_1$ 有限要素空間

$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$,
$I_j = (x_{j-1}, x_j), h_j = x_j - x_{j-1} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$ とし $h = \max_{1 \le j \le m} h_j$,
$\mathcal{P}_k(J)$; 区間 J における次数が k 次以下の多項式の集合とする.
$\mathcal{P}_1$ 有限要素空間は以下のように定義.

$$S_h = \{\nu \in H^1(I) \mid \nu \in \mathcal{P}_1(I_j)\,(j = 1, \cdots, m), \nu(1) = 0\}. \tag{5}$$

$\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$ は基底関数で $\phi_j \in S_h (j = 0, 1, \cdots, m-1)$,
δ_{ij} はクロネッカーのデルタを用いている.

有限要素法の導入

分割の準一様性

区間 $I = [0, 1]$ の分割 $\{x_j\}_{j=0}^{m}$ の準一様性

$$h \leq \beta \min_{1 \leq j \leq m} h_j \tag{6}$$

を定める. ただし β は正の定数で h には依存しないものとする.

これらを踏まえて以下のように有限要素近似を導入する.

質量集中化有限要素近似 (空間方向)

$$\langle w, v \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} w(x_i) v(x_i) (1, \phi_i) \qquad (w, v \in H^1) \tag{7}$$

有限要素法の導入

時間方向についての分割

時間方向については不均一な分割を以下のように行う.

$$t_0 = 0, \qquad t_n = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j \, (n \geq 1) \qquad (\tau_j > 0) \text{ は時間増分のこと}$$

$$\tau = \sup_{j \geq 0} \tau_j$$

と定義する.

以下 $\partial_{\tau_n} u_h^{n+1} = (u_h^{n+1} - u_h^n)/\tau_n$ と表記する.

有限要素法の導入

ノルムの定義

$(\cdot,\cdot)$ と $\langle\cdot,\cdot\rangle$ のノルムはそれぞれ

$$\|v\| = (v,v)^{1/2}, \qquad |||v||| = \langle v,v\rangle^{1/2} \tag{8}$$

で与えられる。またこのノルムは S_h では等価なノルムになる.

以上のことを踏まえて, 有限要素スキームを次のように導入する.

スキーム

次を満たす $u_h^{n+1} \in S_h$ $\quad (n = 0, 1, \cdots,)$ を見いだせ.

$$\langle \partial_{\tau_n} u_h^{n+1}, \chi\rangle + A(u_h^{n+1}, \chi) = \langle f(u_h^n), \chi\rangle \qquad (\chi \in S_h)$$

このスキームの解と (2) の球対称解の誤差の解析を行う.

先行研究との違い

先行研究では方程式 (2) について有限要素スキームを以下のように導入している.
(記号については後ほど説明)

スキーム　ML-1

次を満たす $u_h^{n+1} \in S_h$　　$(n = 0, 1, \cdots,)$ を見いだせ.

$$\langle \partial_{\tau_n} u_h^{n+1}, \chi \rangle + A(u_h^{n+1}, \chi) = (f(u_h^n), \chi) \qquad (\chi \in S_h) \tag{9}$$

本論文では有限要素スキームを以下のように導入する.

スキーム

次を満たす $u_h^{n+1} \in S_h$　　$(n = 0, 1, \cdots,)$ を見いだせ.

$$\langle \partial_{\tau_n} u_h^{n+1}, \chi \rangle + A(u_h^{n+1}, \chi) = \langle f(u_h^n), \chi \rangle \qquad (\chi \in S_h) \tag{10}$$

スキームの解の一意性と正値性

定理 (スキーム解の一意性と正値性)

$n \geq 0, u_h^n \in S_h$ が与えられているとすると以下が成立する.

- (一意性) スキーム (10) には一意な解 $u_h^n \in S_h$ が存在する.
- (正値性)f に非減少性 $f(0) \geq 0$ を追加で仮定.
  $u_h^n \geq 0$ ならば (10) の解 u_h^{n+1} は $u_h^{n+1} \geq 0$ を満たす.

証明はスキーム (ML-1)(9) の解の一意性とほとんど同様に示せる.
スキーム (10) を行列の形に書き改めることが重要.

1 研究の背景

2 有限要素法の導入

3 誤差解析

4 今後の課題

5 参考文献

誤差解析 (スキームの誤差解析をするための準備)

球対称解の滑らかさ

球対称解 (2) の滑らかさを以下のように仮定する;
$T > 0$ に対して $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ とし u は十分滑らかで

$$\kappa(u) = \sum_{k=0}^{2} \|\partial_x^k u\|_{L^\infty(Q_T)} + \sum_{l=1}^{2} \|\partial_x^l u\|_{L^\infty(Q_T)} + \sum_{k=1}^{2} \|\partial_t \partial_x^k u\|_{L^\infty(Q_T)} < \infty \tag{11}$$

が成立.
ここで、$\mathbb{R}^p\,(p > 1)$ 上の有界集合 ω で連続な関数 v に対して
$\|v\|_{L^\infty(\omega)} = \max_{\bar{\omega}} |v|$ という記号を用いている.

誤差解析の準備

射影作用素

$P_A; H^1 \to S_h$ を次のように定義.

$$P_A w \in S_h, \qquad A(P_A - w, \chi) = 0 \qquad (\chi \in S_h) \tag{12}$$

補題

$w \in C^2(\bar{I}) \cap H^1$, と h は十分に小さいことを仮定すると以下が成立.

$$\|P_A w - w\| \leq Ch^2 \|w_{xx}\|, \tag{13}$$

$$\|P_A w - w\|_{L^\infty(I)} \leq C(\log \frac{1}{h}) h^2 \|w_{xx}\|_{L^\infty(I)}, \tag{14}$$

ただし $C > 0$ で,C は β, N にのみ依存.

証明は参考文献 [1] を参照すること.

誤差解析の準備

初期条件

正の定数 C_0 に対して

$$\|u_h^0 - u^0\|_{L^\infty(I)} \leq C_0 h^2 \tag{15}$$

が成立パラメータ $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ のみに依存する正の定数 C を $C = C(\gamma_1, \gamma_2, \cdots)$ と表記する。とりわけ重要なのは定数 C_0 が h, τ に依存しないこと.

証明については, 参考文献 [1] を参照すること.

誤差解析

本論文では以下の定理について証明を与えた.

定理　スキームの L^2 誤差解析

$T > 0$ について球対称解 u は十分に滑らかで (11) を満たすとする. 更に, 準一様性 (6) と初期値の評価 (15) が成立することを仮定する. このとき十分小さな τ, h に対して以下が成り立つ.

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \|u_h^n - u(\cdot, t_n)\| \le C(h^2 + \tau) \tag{16}$$

ここで $C = C(T, f, \kappa(u), C_0, N, \beta)$ で, u_h^n は有限要素解としている.

定理の証明

証明は二段階に分けて行う.

- 定理を f が大域的リプシッツ連続関数と仮定して証明する.
- 定理を局所リプシッツ連続関数と仮定 (元の仮定) して証明する.

定理の証明(STEP1)

STEP1 の仮定

f が大域的リプシッツ連続関数

$$M = \sup_{\substack{s,s' \in \mathbb{R} \\ s \neq s'}} \frac{|f(s) - f(s')|}{|s - s'|} < \infty \tag{17}$$

射影作用素 $P_A u$ を用いて誤差を以下のように分ける.

$$u_h^n - u(\cdot, t_n) = \underbrace{(u_h^n - P_A u(\cdot, t_n))}_{=v_h^n} + \underbrace{(P_A u(\cdot, t_n) - u(\cdot, t_n))}_{=w^n} \tag{18}$$

以下 v_h^n, w^n の誤差解析に進む.

定理の証明(STEP1)(v_h^n の誤差解析

弱形式 (3) において $t = t_{n+1}$ としたものとスキーム (10) に P_A の性質を用いることで以下が得られる.

$$\langle \partial_{\tau_n} v_h^{n+1}, \chi \rangle + A(v_h^n, \chi) = (I + II + III + IV + V + VI)(\chi) \qquad (\chi \in S_h) \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}
I(\chi) &= \langle f(u_h^n), \chi \rangle - \langle f(u(\cdot, t_n), \chi \rangle, \\
II(\chi) &= (u_t(\cdot, t_{n+1}), \chi) - (\partial_{\tau_n} u(\cdot, t_{n+1}), \chi), \\
III(\chi) &= \langle f(u(\cdot, t_n)), \chi \rangle - \langle f(u(\cdot, t_{n+1}), \chi), \\
IV(\chi) &= (\partial_{\tau_n} u(\cdot, t_{n+1}), \chi \rangle - (P_A \partial_{\tau_n} u(\cdot, t_{n+1}), \chi) = (\partial_{\tau_n} w^{n+1}, \chi), \\
V(\chi) &= (\partial_{\tau_n} P_A u(\cdot, t_{n+1}), \chi) - \langle \partial_{\tau_n} P_A u(\cdot, t_{n+1}, \chi), \\
VI(\chi) &= \langle f(u(\cdot, t_{n+1}), \chi \rangle - (f(u(\cdot, t_{n+1}), \chi).
\end{aligned}$$

これを上から評価することで証明は完了する.

定理の証明(STEP2)

STEP2 の仮定の書き換え

f は局所リプシッツ連続関数.$r = \|u\|_{L^\infty(Q_T)}$ とする. また $\tilde{f}(s)$ を次のように定める.

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(r) & (s \geq r) \\ f(s) & (|s| \leq r) \\ f(-r) & (s \leq -r) \end{cases} \tag{20}$$

熱方程式 (2) とスキーム (10) を $f(s)$ で置き換えると $\tilde{f}$ は大域的リプシッツ連続関数で次を満たす.

$$M = \sup_{\substack{s,s' \in \mathbb{R} \\ s \neq s'}} \frac{|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(s')|}{|s - s'|} = \sup_{\substack{|s|,|s'| \leq r \\ s \neq s'}} \frac{|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(s')|}{|s - s'|} < \infty \tag{21}$$

定理の証明(STEP2)

$\tilde{u}, \tilde{u}_h^n$ の収束性のための仮定

球対称解 (2) とスキーム (10) において f を $\tilde{f}(s)$ におきかえたものの解をそれぞれ $\tilde{u}, \tilde{u}_h^n$ とし, 以下を仮定.

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \|\tilde{u_h^n} - \tilde{u}(\cdot, t_n)\|_{L^\infty(Q_T)} \le C(h + h^2 \log \frac{1}{h} + \tau) \tag{22}$$

$\tilde{u}, \tilde{u}_h^n$ の収束性

上記の仮定の下以下が成立.

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \|\tilde{u_h^n} - \tilde{u}(\cdot, t_n)\| \le C(h^2 + \tau) \tag{23}$$

定理の証明(STEP2)

また, 十分小さな h, τ に対して次が成立する.

$$C(h + h^2 \log \frac{1}{h} + \tau) \leq 1 \tag{24}$$

収束性から得られる結果

- r の定義と, 球対称解 (2) の一意性から Q_T 内では $u = \tilde{u}$ であることが分かる.
- (24) より $0 \leq t_n \leq T$ に対して $\|\tilde{u_h^n}\|_{L^\infty(I)} \leq r$ が成立.
- スキームの解の一意性から $u_h^n = \tilde{u_h^n}$ が分かる.

※球対称解の一意性については先行研究で証明済み.

よって STEP2 の証明が完了し, 主定理の証明が完了する.

1 研究の背景

2 有限要素法の導入

3 誤差解析

4 今後の課題

5 参考文献

今後の課題

スキーム (10) の解が球対称解 (2) に L^2 収束することのみ示すことができた.
以下課題をまとめる.
(i) スキームの解が L^∞ で収束する, 即ち以下の定理を示すこと.

スキームの L^∞ 誤差解析

同仮定の下, 十分小さな τ, h に対して以下が成り立つ。

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \|u_h^n - u(\cdot, t_n)\|_{L^\infty(I)} \le C(h + \tau) \tag{25}$$

今後の課題

(ii) 新たなスキーム $\langle \partial_{\tau_n} u_h^{n+1}, \chi \rangle + A(u_h^n, \chi) = (f(u_h^n), \chi) \qquad (\chi \in S_h)$
が L^∞ で収束すること, 即ち以下の定理を示すこと.

新スキームの L^∞ 誤差解析

同仮定の下, 十分小さな τ, h に対して以下が成り立つ。

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \| u_h^n - u(\cdot, t_n) \|_{L^\infty(I)} \le C(h + \tau) \tag{26}$$

(iii) 爆発解の解析収束性はスキーム (10) の方が良いが爆発解の解析には
新たなスキームの方が良いことを示すこと.
(iv) 数値実験とその結果をまとめること.

1 研究の背景

2 有限要素法の導入

3 誤差解析

4 今後の課題

5 参考文献

参考文献

1 T.Nakanishi and N.Saito ,A mass-lumping finite element method for radially symmetric solution of a multidimensional semilinear heat equation with blow-up(2022)

2 T. Nakanishi and N. Saito, Finite element method for radially symmetric solution of a multidimensional semilinear heat equation,Jpn.J.Ind.Appl.Math.37(1)(2020), pp. 165–191.

3 K.Eriksson and V.Thomée, Galerkin methods for singular boundary value problems in one space dimension,Math. Comput. 42(166) (1984), pp. 345–367.

4 D. Jespersen, Ritz-Galerkinmethodsforsingularboundaryvalueproblems, SIAM J. Numer. Anal.15(4) (1978), pp. 813–834.