1 次元 Camley モデルに対する有限要素法の誤差解析

正木 歩　(榊原研究室)

金沢大学大学院自然科学研究科

2026 年 2 月 4 日

目次

1. 導入
2. 数理モデルと変分形式
3. 誤差解析
4. 数値実験
5. まとめ

導入

背景

- 細胞極性: 細胞内での濃度の差が細胞を動かす
- **Wave-Pinning モデル:** 活性化因子 u と非活性化因子 v の相互作用により細胞内に濃度勾配を形成する反応拡散系
- **Camley モデル:**Wave-Pinning モデルに基づいて細胞の動きを表すモデル

課題

- 移動領域上での数値計算が必要（ALE 法など）
- 移動メッシュが解の収束性に
  与える影響について厳密な数学的解析は不十分

本研究の目的

1 次元 Camley モデルに対して有限要素法スキームを構築し,
その誤差評価を数値実験・理論の両面から確立すること.

数理モデル

領域: $\Omega(t) = (a(t), b(t))$, **境界上の外向き速度**: V,
$f(u, v)$: **非線形項 (双安定型)**, α, β, D_u, D_v: **正の定数**

領域内での偏微分方程式;

$$\begin{cases} \partial_t u = D_u \partial_x^2 u + f(u, v) & \text{in } \Omega(t), \\ \partial_t v = D_v \partial_x^2 v - f(u, v) & \text{in } \Omega(t). \end{cases} \tag{1}$$

境界条件 (移動領域上での自然な Neumann **境界条件)**;

$$\begin{cases} -D_u \partial_x u + uV = 0 & \text{on } a(t), \\ D_u \partial_x u + uV = 0 & \text{on } b(t), \\ -D_v \partial_x v + vV = 0 & \text{on } a(t), \\ D_v \partial_x v + vV = 0 & \text{on } b(t). \end{cases}$$

領域の動き;

$$\begin{cases} V(a(t), t) = -\dot{a}(t) = \alpha u(a(t), t) - \beta, \\ V(b(t), t) = \dot{b}(t) = \alpha u(b(t), t) - \beta \end{cases}$$

変分形式

人工的な速度場 w と物質微分 $\partial^{\bullet(w)}u := \partial_t u + w\partial_x u$ を導入し,
弱形式を以下のように定義;

問題: Find $u, v \in L^2(0, T; H^1(\Omega(t)))$ such that for all $t \in [0, T]$

$$
\begin{cases}
(\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\Omega(t)} u\xi\, dx) + \displaystyle\int_{\Omega(t)} \left[-u\partial^{\bullet(w)}\xi + uw\partial_x\xi + D_u(\partial_x u)(\partial_x\xi) - f(u,v)\xi\right] dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\xi \in H^1(\Omega(t)), \\
(\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\Omega(t)} v\varphi\, dx) + \displaystyle\int_{\Omega(t)} \left[-v\partial^{\bullet(w)}\varphi + vw\partial_x\varphi + D_v(\partial_x v)(\partial_x\varphi) + f(u,v)\varphi\right] dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi \in H^1(\Omega(t)).
\end{cases}
\tag{2}
$$

移動領域上での誤差解析は難しい
→参照領域 (固定領域)$\hat{\Omega}$ への写像 $q(\hat{x}, t)$ を定義し,
(2) を改めて定式化して解析を行う

参照領域上の変分形式

(2) は写像 $q(\hat{x}, t) = a(t)(1 - \hat{x}) + b(t)\hat{x}$ を用いて $\hat{\Omega}$ 上で次のように定式化;

Find $\hat{u}, \hat{v} \in L^2(0, T; H^1(\hat{\Omega}))$ with $\partial_t \hat{u}, \partial_t \hat{v} \in L^2(0, T; L^2(\hat{\Omega}))$
such that for all $t \in [0, T]$

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{\hat{\Omega}} \left[(\partial_t \hat{u})\xi l(t) + \hat{u}\hat{\xi}\dot{l}(t) + \hat{u}\hat{w}\partial_x \hat{\xi} + \frac{D_u}{l(t)} (\partial_{\hat{x}} \hat{u})(\partial_{\hat{x}} \hat{\xi}) - f(\hat{u}, \hat{v})\hat{\xi} l(t) \right] dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \hat{\xi} \in H^1(\hat{\Omega}) \\
\displaystyle\int_{\hat{\Omega}} \left[(\partial_t \hat{v})\varphi l(t) + \hat{v}\hat{\varphi}\dot{l}(t) + \hat{v}\hat{w}\partial_x \hat{\varphi} + \frac{D_u}{l(t)} (\partial_{\hat{x}} \hat{v})(\partial_{\hat{x}} \hat{\varphi}) - f(\hat{u}, \hat{v})\hat{\varphi} l(t) \right] dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \hat{\varphi} \in H^1(\hat{\Omega})
\end{cases}
\tag{3}
$$

空間離散についてもほとんど同様に行う

半離散問題

参照領域 $\hat{\Omega} = (0, 1)$ 上の有限要素空間
$\hat{\Psi}_h := \{\eta \in C(\bar{\hat{\Omega}}) | \eta|_{[\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1([\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}])\}$ **で以下のように離散化.**

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{\hat{\Omega}} [(\partial_t \hat{u}_h)\hat{\xi}_h l_h + \hat{u}_h \hat{\xi}_h (\partial_{\hat{x}} \hat{w}_h) + \hat{u}_h \hat{w}_h (\partial_{\hat{x}} \hat{\xi}_h) + \frac{D_u}{l_h} (\partial_{\hat{x}} \hat{u}_h)(\partial_{\hat{x}} \hat{\xi}_h) - f(\hat{u}_h, \hat{v}_h)\hat{\xi}_h l_h] d\hat{x} = 0 \\
\qquad\qquad \forall \hat{\xi}_h \in \hat{\Psi}_h \\
\displaystyle\int_{\hat{\Omega}} [(\partial_t \hat{v}_h)\hat{\varphi}_h l_h + \hat{v}_h \hat{\varphi}_h (\partial_{\hat{x}} \hat{w}_h) + \hat{v}_h \hat{w}_h (\partial_{\hat{x}} \hat{\varphi}_h) \quad + \frac{D_v}{l_h} (\partial_{\hat{x}} \hat{v}_h)(\partial_{\hat{x}} \hat{\varphi}_h) + f(\hat{u}_h, \hat{v}_h)\hat{\varphi}_h l_h] d\hat{x} = 0 \\
\qquad\qquad \forall \hat{\varphi}_h \in \hat{\Psi}_h
\end{cases}
\tag{4}
$$

ここで,$\hat{\psi}_i(\hat{x})$ は $\hat{\Omega}$ 上の基底関数とし,

$$
\hat{u}_h(\hat{x}, t) = \sum_i^N u_i(t)\hat{\psi}_i(x), \quad \hat{v}_h(\hat{x}, t) = \sum_i^N v_i(t)\hat{\psi}_i(x), \quad \hat{w}_h(\hat{x}, t) = \sum_i^N w_i(t)\hat{\psi}_i(x),
$$

$$
l_h(\hat{x}, t) = \partial_{\hat{x}} q(\hat{x}, t), \quad \hat{w}(\hat{x}, t) = \partial_t q(\hat{x}, t)
$$

とする.

シミュレーション結果

シミュレーション設定;

- 領域: $\Omega(0) = (0, 10),\ t \in [0, 15]$.
- 初期条件: u は左側に極性を持つ以下の関数を採用;

$$u(x,0)\begin{cases} = 1.5 & (x \le 1) \\ = 0.4 & (x > 1), \end{cases} \qquad v(x,0) = 1.0,$$

- 要素数: $N = 51, (h \approx L(0)/N)$
- パラメータ $\alpha = 0.5, \quad \beta = 0.378, \quad D_u = 0.1, \quad D_v = 10.0$

結果

- 時間経過とともに領域 $l(t)$ が左に移動
- 領域の長さ $l(t) = 10$ はパラメータ α, β を調整し一定に
- u（青）の極性に従って境界が移動し, 安定した形に
- $t = 15$ 以降も安定した形のまま移動

誤差評価

(3) と (4) に対し,
エネルギー法を用いることで以下の主定理を得た.

定理（誤差評価）

$u, v \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ を仮定.
このとき十分小さなメッシュサイズ h に対し, 以下が成立;

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq Ch \tag{5}$$
$$\|v - v_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq Ch \tag{6}$$

ここで,C は h に依存しない正の定数.

$L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ノルムにおいて 1 次収束 ($O(h)$) が理論的に保証される.

数値実験設定

提案手法の妥当性を検証するための実験を行った.
特に理論解析との整合性を確認するため
解の正則性に配慮した初期値を設定した.

- **領域:** $\Omega(0) = (0, 10),\ t \in [0, 5]$.
- **初期条件:** 滑らかな関数を採用 ($u \in H^2(\Omega)$ を保証するため).

$$u(x, 0) = u_{low} + \frac{u_{high} - u_{low}}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{x - x_c}{w} \right) \right)$$

- **要素数:** $N = 51, \ldots, 801. (h \approx L(0)/N)$
- **時間刻み:** $\Delta t = Ch^2 \quad (C = 0.025)$ となるよう制御

実験結果

Table 1: 誤差および実験的収束次数

Step	u in H^1		v in H^1		u in L^2		v in L^2	
$(N_{coarse} \to N_{fine})$	Error	Order	Error	Order	Error	Order	Error	Order
$51 \to 101$	2.85e-01	0.98	3.34e-03	1.07	1.81e-02	1.97	1.38e-03	1.85
$101 \to 201$	1.45e-01	0.99	1.59e-03	1.02	4.61e-03	1.99	3.83e-04	1.96
$201 \to 401$	7.28e-02	1.00	7.81e-04	1.00	1.16e-03	2.00	9.83e-05	1.99
$401 \to 801$	3.65e-02	-	3.89e-04	-	2.91e-04	-	2.48e-05	-

$\Rightarrow$ u, v **共に** H^1 **ノルムで 1 次収束,** L^2 **ノルムで 2 次収束 を確認.**

まとめと今後の課題

本研究の成果

- 1 次元 Camly モデルに対し, 有限要素法による誤差解析を行った.
- 理論的に $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ノルムで $O(h)$ の収束 を証明.
- 数値実験においても, 理論と整合する $O(h)$ の収束精度が得られた.

今後の課題

- 連続問題における解の存在・一意性の厳密な証明.
- Aubin – Nitsche のトリック (双対論法) を用いた $L^2(\Omega)$ での 2 次収束の証明.
- 2 次元 Camley 問題の考察.

参考文献 I



P. Pozzi and B. Stinner, Curve shortening flow coupled to lateral diffusion, *Numer. Math.* **135** (2017), 1171–1205.



K. S. Putri, T. Mizuochi, N. Kolbe, and H. Notsu, Error estimates for first- and second-order Lagrange-Galerkin moving mesh schemes for the one-dimensional convection-diffusion equation, *J. Sci. Comput.* **101** (2024), Paper No. 37.