曲線短縮流と曲線上の拡散方程式のカップリング問題の数値解析

【参考文献】

P. Pozzi and B. Stinner.,
Curve shortening flow coupled to lateral diffusion.
Numerische Mathematik　1171–1205, 2017.

正木 歩
榊原研究室

2025/9/8

1. 自己紹介
2. イントロダクション
3. 主定理
4. 数値実験
5. まとめと今後の課題

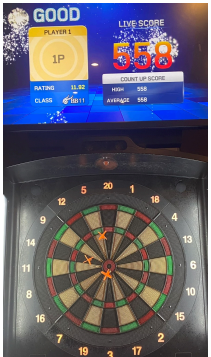
1. 自己紹介
2. イントロダクション
3. 主定理
4. 数値実験
5. まとめと今後の課題

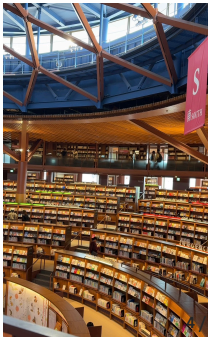
自己紹介

名前: 正木 歩
出身: 千葉県船橋市
大学: 武蔵野大学工学部→金沢大学大学院自然科学研究科
趣味: 読書, カフェ巡り, お酒, ダーツ, カラオケ
MBTI:INTJ-T(建築家) 独創的・戦略的にものごとを考える (らしい)









1. 自己紹介
2. イントロダクション
3. 主定理
4. 数値実験
5. まとめと今後の課題

イントロダクション

初期曲線Γ_0と初期関数$c(t):\Gamma_0\to\mathbb{R}$が与えられた時に
次を満たすような$\{\Gamma(t)\}_{t\in[0,T]}\subset\mathbb{R}^2$,$c(t):\Gamma(t)\to\mathbb{R}$,$t\in[0,T]$
を見つける.

$$v=\kappa+f(c), \tag{1.1}$$

$$\partial_t^\bullet c-c\kappa v=c_{ss} \tag{1.2}$$

$$\Gamma(0)=\Gamma_0, c(0)=c_0 \tag{1.3}$$

$s:\Gamma(t)$の弧長パラメータ,$v:$法線方向の速度,
$\kappa:$曲率,$f(c):$強制項,
$\partial_t^\bullet=\partial_t c+v\partial_\nu c:$物質微分

曲線のパラメータ化

関数族 $\{u(t)\}_t$ で曲線をパラメータ化する.

$$u(t) : S^1 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{i.e.}, \Gamma(t) = u(S^1, t)$$

曲線の幾何方程式 (1.1), 曲線上の PDE(1.2) は次のようになる.

$$0 = u_t - \frac{1}{|u_x|}\left(\frac{u_x}{|u_x|}\right)_x - f(c)\frac{u_x^\perp}{|u_x|} = u_t - \frac{1}{|u_x|}\tau_x - f(c)\nu \tag{1.4}$$

$$0 = c_t + c\frac{|u_x|_t}{|u_x|} - \frac{1}{|u_x|}\left(\frac{c_x}{|u_x|}\right)_x \tag{1.5}$$

$\tau = \frac{u_x}{|u_x|}$: 単位接線ベクトル, $\nu = \frac{u_x^\perp}{|u_x|}$: 単位法線ベクトル

弱形式化

更に (1.4),(1.5) を弱形式化する.

次を満たす関数 $u : S^1 \times [0,T] \to \mathbb{R}^2, c : S^1 \times [0,T] \to \mathbb{R}$ を見いだせ.

- $u(\cdot,t) = u_0, c(\cdot,0) = c_0$ を満たす.
- 任意のテスト関数 $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2, \zeta : S^1 \to \mathbb{R}$ に対して
  ほとんどすべての時間 $t \in [0,T]$ で次をみたす.

$$\int_{S^1} u_t \cdot \varphi |u_x| dx + \int_{S^1} \frac{u_x}{|u_x|} \cdot \varphi_x dx = \int_{S^1} f(c) \varphi \cdot u_x^{\perp} dx, \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{S^1} c\zeta |u_x| dx\right) + \int_{S^1} \frac{c_x \zeta_x}{|u_x|} dx = 0. \tag{1.7}$$

空間離散化

$Y_h, X_h := Y_h^2$ を有限要素空間として次の問題を考える.

次を満たす関数 $u_h(\cdot,t) \in X_h, c_h(\cdot,t) \in Y_h, t \in [0,T]$ を見いだせ.

- $u_h(\cdot,0) = u_{h0} := I_h(u_0), c_h(\cdot,0) = c_{h0} := I_h(c_0)$.
- 任意のテスト関数 $\varphi_h \in X_h, \zeta_h \in Y_h$ に対してほとんどすべての時間 $t \in [0,T]$ で次を満たす.(I_h は補間作用素)

$$\int_{S^1} I_h(u_{ht} \cdot \varphi_h)|u_{hx}|dx + \int_{S^1} \frac{u_{hx}}{|u_{hx}|} \cdot \varphi_{hx} dx = \int_{S^1} I_h(f(c_h)\varphi_h) \cdot u_{hx}^{\perp} dx \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{S^1} c_h \zeta_h |u_{hx}| dx\right) + \int_{S^1} \frac{c_{hx}\zeta_{hx}}{|u_{hx}|} dx = 0 \tag{1.9}$$

❶ 自己紹介

❷ イントロダクション

❸ 主定理

❹ 数値実験

❺ まとめと今後の課題

主定理

仮定

- f, f' は有界で定数 C が存在し $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C, \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C$
- 弱形式 (1.6),(1.7) の初期値は
  $u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in H^2(S^1), c(\cdot, 0) = c_0(\cdot) \in H^1(S^1)$ で
  時間 $t \in [0, T]$ で一意な解 (u, c) が存在し
  $u \in W^{1,\infty}([0, T], H^2(S^1))$,
  $c \in W^{1,\infty}([0, T], H^1(S^1)) \cap L^\infty([0, T], H^2(S^1))$.
- 定数 C^{**} が存在し,$|u_x| \geq C^{**} on \quad S^1 \times [0, T]$

主定理

定理

先の仮定の下, ある $h_0 > 0$ が存在し,$0 < h < h_0$ を満たすような任意の h に対して (1.8),(1.9) には一意な解 (u_h, c_h) が存在し弱形式の解との誤差が以下のように抑えられる.

$$\int_0^T \int_{S^1} (|u_t - u_{ht}|^2 + |c_x - c_{hx}|^2) dx dt \leq Ch^2,$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_{S^1} (|\tau - \tau_h|^2 + |c - c_h|^2 + (|u_x| - |u_{hx})^2) dx \leq Ch^2$$

ただし定数 C は最終時刻 T に依存する.

1 自己紹介

2 イントロダクション

3 主定理

4 数値実験

5 まとめと今後の課題

数値実験

パラメータ化された式 (1.4),(1.5) の解を得るのは困難.
適当な解 (u, c) を作成して代入.

ソース項つき強形式

$$u_t - \frac{1}{|u_x|}\left(\frac{u_x}{|u_x|}\right) - f(c)\frac{u_x^{\perp}}{|u_x|} = s_u \tag{3.1}$$

$$c_t + c\frac{|u_x|_t}{|u_x|} - \frac{1}{|u_x|}\left(\frac{c_x}{|u_x|}\right)_x = s_c \tag{3.2}$$

ただし関数 $s_u : S^1 \times [0,T] \to \mathbb{R}^2, s_c : S^1 \times [0,T] \to \mathbb{R}$. である.

作り上げた適当な解 (u, c) に離散解 (u_h, c_h) が収束するか.

ソース項つき弱形式

$$\int_{S^1} I_h(u_{ht}\cdot\varphi_h)|u_{hx}|dx+\frac{u_{hx}}{|u_{hx}|}\cdot\varphi_{hx}dx = \int_{S^1} I_h(f(c_h)\varphi_h)\cdot u_{hx}^{\perp}+I_h(s_u\cdot\phi_h)|u_{hx}|dx, \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{S^1} c_h\zeta_h|u_{hx}|dx\right)+\int_{S^1}\frac{c_{hx}\zeta_{hx}}{|u_{hx}|}dx=\int_{S^1} I_h(s_c)\zeta_h|u_{hx}|dx. \tag{3.4}$$

時間離散化

半陰的スキームを適用する.

全離散スキーム

時間幅 $\delta > 0$ が与えれたとき,$M = T/\delta$ として次を満たす関数 $u_{\delta h}^{(m)}(\cdot) \in X_h, c_{\delta h}^{(m)}(\cdot) \in Y_h$ を各時刻 $m = 0, \dots M$ で見いだせ.

- $u_{\delta h}^{(m)}(x) := \sum_{j=1}^{N} u_j^{(m)} \varphi_j(x), \quad c_{\delta h}^{(m)}(x) := \sum_{j=1}^{N} c_j^{(m)} \varphi_j(x)$
  ただし $u_j^{(m)} \in \mathbb{R}^2, c_j^{(m)} \in \mathbb{R}$
- 初期条件 $u_{\delta h}^{(0)}(\cdot) = u_{h0}, c_{\delta h}^{(0)}(\cdot) = c_{h0}$
- 任意のテスト関数 $\varphi_h \in X_h, \zeta_h \in Y_h$ と全ての $m \in \{0, \dots, M-1\}$ で次を満たす.

全離散スキーム

$$\int_{S^1} I_h\left(\frac{u_{\delta h}^{(m+1)}-u_{\delta h}^{(m)}}{\delta}\cdot\varphi_h\right)|u_{\delta hx}^m|+\frac{u_{\delta hx}^{(m+1)}}{|u_{\delta hx}^{(m)}|}\cdot\varphi_{hx}dx$$

$$=\int_{S^1} I_h(f(c_{\delta h}^{(m)})\varphi_h)\cdot(u_{\delta hx)}^{(m)})^{\perp}+I_h(s_u^{(m+1)}\cdot\varphi_h)|u_{\delta hx}^{(m)}|dx \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\delta}\left(\int_{S^1}(c_{\delta h}^{(m+1)}|u_{\delta hx}^{(m+1)}|-c_{\delta h}^{(m)}|u_{\delta hx}^{(m)}|)\zeta_h dx\right)+\int_{S^1}\frac{c_{\delta hx}^{(m+1)}\zeta_{hx}}{|u_{\delta hx}^{(m+1)}|}dx$$

$$=\int_{S^1} I_h(s_c^{(m+1)})\zeta_h|u_{\delta hx}^{(m)}|dx. \tag{3.6}$$

アルゴリズム

アルゴリズム

1. 時間ステップ m を 0 にして, 初期座標 $u_i^{(0)}, c_i^{(0)}$ を計算.
頂点間の　長さ $q_i^{(0)} = |u_i^{(0)} - u_{i-1}^{(0)}|, (i = 1, \ldots, N.)$ を計算
(※ $q_i^{(0)} < 0$ ならシュミレーション中止)
2. m 秒後の値 $u^{(m)}, c^{(m)}$ より
$u^{(m+1)}, q_i^{(m+1)} = |u_i^{(m+1)} - u_{i-1}^{(m)}|$ を計算.
3. m 秒後の値 $u^{(m)}, c^{(m)}, m+1$ 秒後の座標 $u^{(m+1)}$ より
$c^{(m+1)}$ を計算.
4. $q_i^{(m+1)} \geq tol$ かつ $m + 1 < M$ ならば
時間ステップ m を 1 増やして Step2 に戻る.

Step2の計算

$(m+1)$秒後の各頂点の座標$u_i^{(m+1)}$を未知数とする
連立一次方程式を解く.

$$\frac{1}{2\delta}(q_{i+1}^{(m)}+q_i^{(m)})u_i^{(m+1)}-\frac{1}{q_i^{(m)}}u_{i-1}^{(m+1)}+\left(\frac{1}{q_{i+1}^{(m)}}+\frac{1}{q_i^{(m)}}\right)u_i^{(m+1)}-\frac{1}{q_{i+1}^{(m)}}u_{i+1}^{(m+1)}$$
$$=\frac{1}{2}(q_{i+1}^{(m)}+q_i^{(m)})\left(\frac{1}{\delta}u_i^{(m)}+s_u(x_i)^{(m+1)}\right)+\frac{1}{2}f(c_i^{(m)})(u_{i+1}^{(m)}-u_{i-1}^{(m)})^{\perp}.$$

Step3の計算

各頂点上の値 $c_j^{(m+1)}$ を未知数とする連立一次方程式を解く.

$$\left(\frac{1}{3\delta}(q_{j+1}^{(m+1)}+q_j^{(m+1)})+\left(\frac{1}{q_{j+1}^{(m+1)}}+\frac{1}{q_j^{(m+1)}}\right)\right)c_j^{(m+1)}$$
$$+\left(\frac{1}{6\delta}q_{j+1}^{(m+1)}-\frac{1}{q_{j+1}^{(m+1)}}\right)c_{j+1}^{(m+1)}+\left(\frac{1}{6\delta}q_j^{(m+1)}-\frac{1}{q_j^{(m+1)}}\right)c_{j-1}^{(m+1)}$$
$$=\frac{1}{3\delta}\left(q_{j+1}^{(m)}+q_j^m)(c_j^m+\delta s_c(x_j)^{(m+1)}\right)$$
$$+\frac{1}{6\delta}q_{j+1}^{(m)}\left(c_{j+1}^{(m)}+\delta s_c(x_{j+1})^{(m+1)}\right)+\frac{1}{6\delta}q_j^{(m)}\left(c_{j-1}^{(m)}+\delta s_c(x_{j-1})^{(m+1)}\right)$$

半径対称解

曲線 u: 常に円 (半径 $R(t)$), 場の値 c: 円周上 $B(t)$ とすると
速度:$v = R'(t)$, 曲率:$\kappa = -1/R(t)$
s 曲線の幾何方程式 (1.1), 曲線上の PDE(1.2) は次のようになる.

半径対称問題 (※ ODE)

$$R'(t) = -\frac{1}{R(t)} + f(B(t)), \quad B'(t) + \frac{B(t)R'(t)}{R(t)} = 0.$$

初期値 $R(0) = 1.25, B(0) = 0.8$, 強制項 $f(B) = 2B - 1$.
(※ $(R(t), B(t)) = (1, 1)$ は停留点.)
(※ $f(B)$ は非有界. シュミレーションでは有界なので定理適用可能.)

離散化

$N \in \mathbb{N}, h = 1/N$ として初期値を以下のように定める.

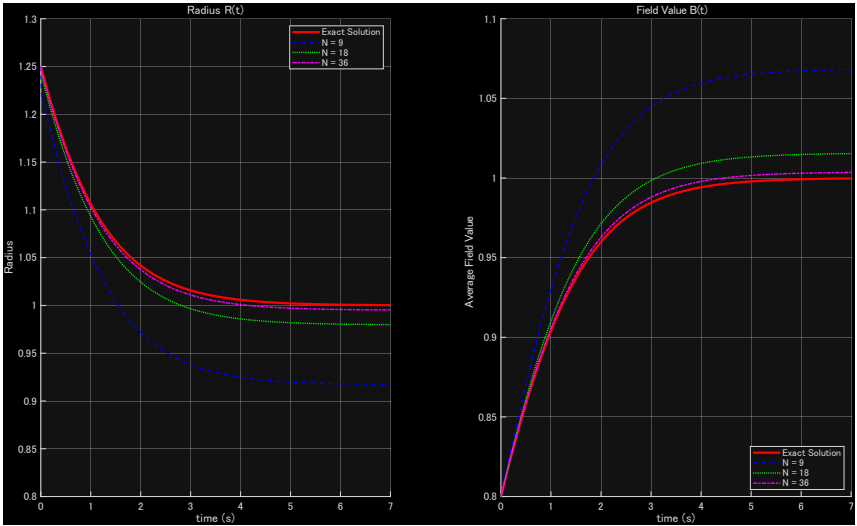
$$u_j^{(0)} = R(0) \begin{pmatrix} \cos(2\pi j)/h \\ \sin(2\pi j)/h \end{pmatrix}, c_j^{(0)} = B(0)$$

時間ステップ $\delta = h^2$ とする.(誤差は空間離散化に依存するように)
計算された多角形の半径 $R_{\delta h}$ は 2π で割り,$B_{\delta h}$ は平均を取る.

$$R_{\delta h}^{(m)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} q_j^{(m)}, \quad B_{\delta h}^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} c_j^{(m)}, \quad m \in \{0, 1, \dots M\}.$$

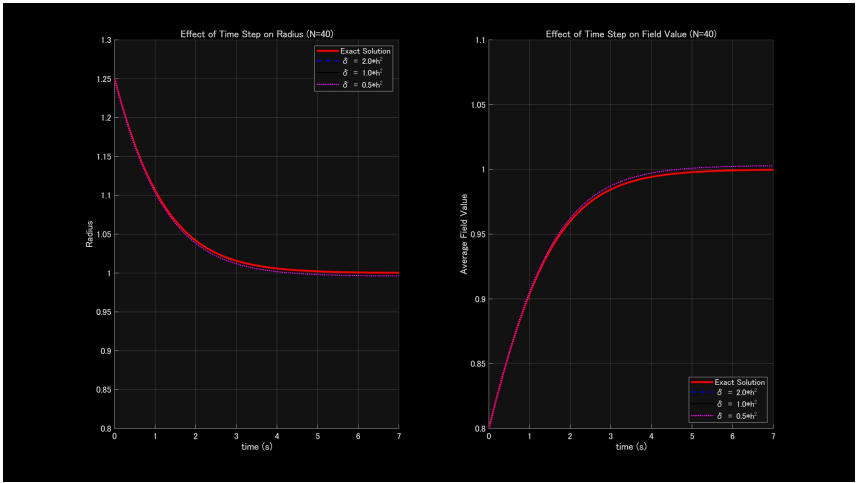
精度検証

ODE の真の解 (赤線)$N = 9, 18, 36$ で検証.



精度検証 (誤差は空間離散化による)

$\delta = 0.5h^2, h^2, 2h^2$ で検証. ほとんど変化なし



誤差と収束のオーダー

誤差 e_1, e_2, 刻み幅 h_1, h_2 のとき EOC:= $log(e_1/e_2)/log(h_1/h_2)$

Table: 誤差と収束のオーダー

N	h	Error(R)	EOC(R)	Error(B)	EOC(B)
9	1.11e-01	1.55e-01	—	1.14e-01	—
18	5.56e-02	3.84e-02	2.02	2.65e-02	2.11
36	2.78e-02	9.57e-03	2.00	6.49e-03	2.03

空間 2 次精度を持つことが確認できる.

❶ 自己紹介

❷ イントロダクション

❸ 主定理

❹ 数値実験

❺ まとめと今後の課題

まとめ

- 以下を数学的厳密に証明.(今回は省略)

$$\int_0^T \int_{S^1} (|u_t - u_{ht}|^2 + |c_x - c_{hx}|^2) dx dt \leq Ch^2,$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_{S^1} (|\tau - \tau_h|^2 + |c - c_h|^2 + (|u_x| - |u_{hx})^2) dx \leq Ch^2$$

- 半径対称問題で検証: アルゴリズムは正しく, 空間 2 次精度をもつ.

今後の課題

本来はより複雑な解

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{2}\sin(2\pi t))\cos(2\pi x) \\ (1-\frac{1}{2}\sin(2\pi t))\sin(2\pi x) \end{pmatrix},$$

$$c(x,t) = t\cos(8\pi x) + (1-t)\sin(6\pi x)$$

を考えたかった.
$q = |u_i - u_{i-1}|$ がすぐに小さくなってしまいシュミレーション不可に.
参考文献で安定化させる方法を勉強中.